Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Facultad de Ciencias Matemáticas
Escuela Académico Profesional de Matemática

Solución de una ecuación diferencial tipo Dirichlet

MONOGRAFÍA

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

José Jeremías CABALLERO CANTÚ

ASESOR

Jorge Icaro CONDADO JÁUREGUI

Lima, Perú

2008

Referencia bibliográfica

Caballero, J. (2008). *Solución de una ecuación diferencial tipo Dirichlet*. Monografía para optar el título profesional de Licenciado en Matemática. Escuela Académico Profesional de Matemática, Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos en primer lugar a Dios por toda la ayuda brindada, a mis padres por su incansable apoyo en todo momento. Un especial agradecimiento a mi asesor por el tiempo brindado, por su apoyo constante y sugerencias brindadas, y a todas las personas que de alguna manera contribuyeron a la realización de este trabajo.

RESUMEN

JOSÉ JEREMÍAS CABALLERO CANTU

ABRIL - 2008

ASESOR : Mg. Jorge Condado Jáuregui

Título Obtenido: Licenciado en Matemática

En el presente artículo daré la solución numérica de la ecuación diferencial con condiciones de frontera

$$\begin{cases} u = u(x) : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R} \\ -(p(x)u'(x))' + q(x)u = f(x) \qquad \text{..................} \qquad (*) \\ u(0) = 0 \quad , \quad u(L) = 1 \end{cases}$$

Resolveremos por el método de Elementos Finitos con funciones de base Lineales. La ***Forma Clásica*** (*) la pasamos a la ***Forma Variacional*** o débil luego discretizamos; de la cual nos sale un sistema de n ecuaciones lineales y resolviendo éste sistema tenemos la solución aproximada u_h

<u>PALABRAS CLAVES:</u> SOLUCIÓN APROXIMADA
FORMULACIÓN DÉBIL
ELEMENTOS FINITOS
GALERKIN
FUNCIONES DE FORMA
FUNCIONES DE BASE
DISCRETIZACIÓN

SUMMARY

JOSÉ JEREMÍAS CABALLERO CANTU

APRIL - 2008

ASSESOR : Mg. Jorge Condado Jáuregui

Obtained title : Graduate in Mathematics

Presently article will give the numeric solution of the differential equation with frontier conditions

$$\begin{cases} u = u(x) : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R} \\ -(p(x)u^{'}(x))^{'} + q(x)u = f(x) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (*) \\ u(0) = 0 \quad , \quad u(L) = 1 \end{cases}$$

We will solve for the method of Finite Elements with Lineal base functions. The Classic Form (*) we pass it to the form variacional or weak then discretizamos; of which comes out us a system of n lineal equations and solving this system has the approximate solution

KEY WORDS: APPROXIMATE SOLUTION
WEAK FORMULATION
FINITE ELEMENTS
GALERKIN
WORK OF IT FORMS
WORK OF IT BASES
DISCRETIZACIÓN

ÍNDICE

CONCLUSIÓN

CAPÍTULO I

1.1 INTRODUCCIÓN

Muchos problemas en matemática aplicada conducen a ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones de frontera.

Un primer problema es hallar una función $u = u(x)$ de una variable real x, que satisfaga la ecuación $-(p(x)u')' + q(x)u = f(x)$.

En general existe una familia de funciones diferenciables $u(x)$ que son soluciones de ésta ecuación. A través de requerimientos adicionales uno puede obtener una solución de la familia de soluciones, esto se logra manteniendo fijas a $p(x)$ y $q(x)$ y haciendo variar a $f(x)$ ya que las condiciones de frontera son fijas, para cualquier $f(x)$.

Para nosotros, nuestra condición de frontera es $u(0) = 0$, $u(L) = 1$, con $L > 0$, la cual nos dice que estamos obteniendo una función $u = u(x)$ cuya gráfica tiene como extremos a los puntos $(0,0)$ y $(L,1)$.

Así tenemos nuestro problema que es:

$$\begin{cases} \text{Hallar} \quad u = u(x) : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R} \, / \\ -(p(x)u')' + q(x)u = f(x) \\ u(0) = 0 \quad , \quad u(L) = 1 \end{cases}$$

En general no es posible encontrar la solución explícita $u(x)$ [solución exacta] para todos los casos, pero si es posible encontrar una solución aproximada [solución numérica], la cual se forma de una partición de $[0, L]$ dado por x_i, $i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ obteniéndose la solución aproximada $u_h(x)$ que coincide con la solución exacta en los puntos x_i de la partición.

CAPÍTULO II

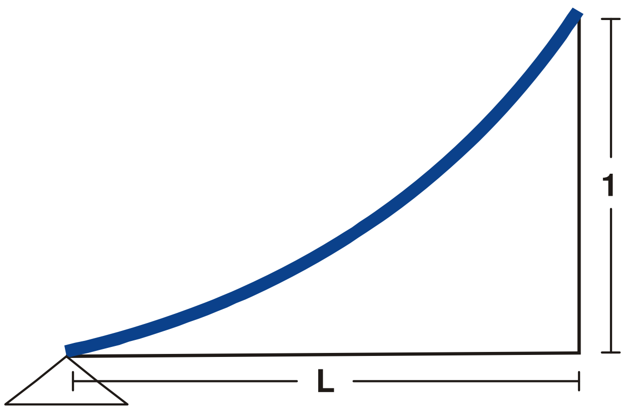
2.1 MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

Consideremos el problema lineal de valor de frontera denominado ***EL PROBLEMA DE STURM LIOUVILLE***, que consiste en:

$$\begin{cases} \text{Hallar} \quad u(x):[0,L] \longrightarrow \mathbb{R} \,/ \\ -(p(x)u')' + q(x)u = f(x) \\ u(0)=0 \quad , \quad u(L)=1 \end{cases} \quad \text{........................} \quad (1)$$

La condición de frontera impuesta a este problema es $u(0)=0,\ u(L)=1$, la cual es denominada *LA CONDICIÓN ESENCIAL O TIPO DIRICHLET.*

Esta ecuación diferencial describe la deflexión $u(x)$ de la viga de longitud L que tiene una sección transversal variable que está representada por $q(x)$. La deflexión se debe a los esfuerzos agregados por $p(x)$ y $f(x)$.



TEOREMA 1.

Sea $p \in C^1[0,L],\ \ q, f \in C[0,L]\ \ y\ \ q(x) \geq 0,\ \ p(x) \geq \delta > 0,\ \ \forall x \in [0,L],$ entonces existe la función $u \in C_0^2[0,L]$ la cual es la solución única del problema de valor de frontera (1)

2.2 FORMA VARIACIONAL

Partimos del problema de Sturm Liouville el cual voy a expresarlo en *FORMA DÉBIL O FORMA VARIACIONAL*

La ecuación diferencial (1), la multiplico por un $v \in C_0^2([0,L])$ y luego integro de 0 a L

$$-\int_0^L (p(x)u')'vdx + \int_0^L q(x)uvdx = \int_0^L f(x)vdx \quad \text{................} \ (2)$$

Por integración por partes aplicada a la primera integral, hago el cambio de variable

$$\begin{cases} m = v & \Rightarrow \quad dm = v'dx \\ dn = (p(x)u')'dx & \Rightarrow \quad n = p(x)u' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^L (p(x)u')'vdx = [p(x)u'v]_0^L - \int_0^L p(x)u'v'dx$$

Luego (2) queda de la siguiente forma,

$$\int_0^L p(x)u'v'dx + \int_0^L q(x)uvdx = \int_0^L f(x)vdx + [p(x)u'v]_0^L$$

Llamada FORMA *DÉBIL O FORMA VARIACIONAL:*

2.3 EL MÉTODO DE GALERKIN

El método aproxima la solución $u(x)$, no con todas las funciones en $C_0^2([0,L])$, sino sobre un conjunto más pequeño de funciones que consisten en combinaciones lineales de ciertas funciones de base $L_1,\ L_2,\ \ldots\ ,L_n$. Las funciones de base deben ser linealmente independientes y satisfacer $L_i(0) = L_i(L) = 0, \quad \forall\ i = 1,2,\ \ldots\ ,n-1$ y $L_n(0) = 0, \quad L_n(L) = 1.$ Así el método consiste en encontrar las constantes $c_1,\ c_2,\ \ldots\ ,c_n.$ tal que $u_h(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i L_i(x)$ que satisface *EL PROBLEMA DISCRETO* dado por

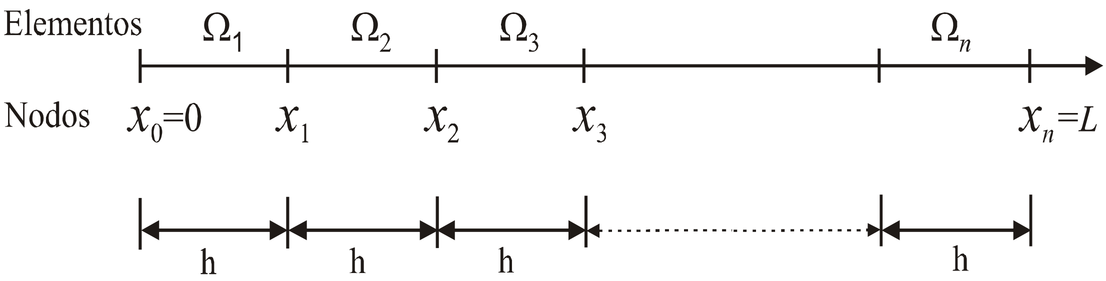
$$\int_0^L p(x)u_h'v_h'dx + \int_0^L q(x)u_h v_h dx = \int_0^L f(x)v_h dx + \left[p(x)u_h' v_h \right]_0^L, \ \forall v_h \in Gen\{L_1, L_2, \ldots, L_n\} \quad (3)$$

2.4 ELEMENTOS FINITOS LINEALES

Estas funciones de base $L_1,\ L_2,\ \dots,L_n$ del método de Galerkin forman el Espacio de Elementos Finitos $V_h = Gen\{L_1, L_2, ..., L_n\}$, las cuales pueden ser de diferente forma pero con la característica de que cumplen las condiciones de frontera del problema (1).

Mostraré el caso específico de los *ELEMENTOS FINITOS LINEALES* para los que las funciones de base L_i son polinomios segmentarios lineales, las cuales forman el Espacio de Elementos Finitos Lineales $V_h = Gen\{L_1, L_2, ..., L_n\}$. Veamos éstas funciones de base.

Primeramente dividimos el intervalo $[0, L]$ en n sub intervalos iguales cuyos extremos son los nodos $x_i = ih$ para $i = 0,\ 1,\ 2,\ \dots,n.$, donde $h = \dfrac{L}{n}$.

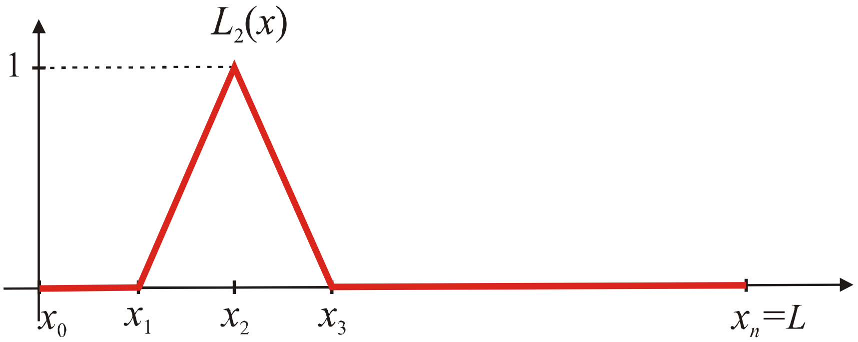


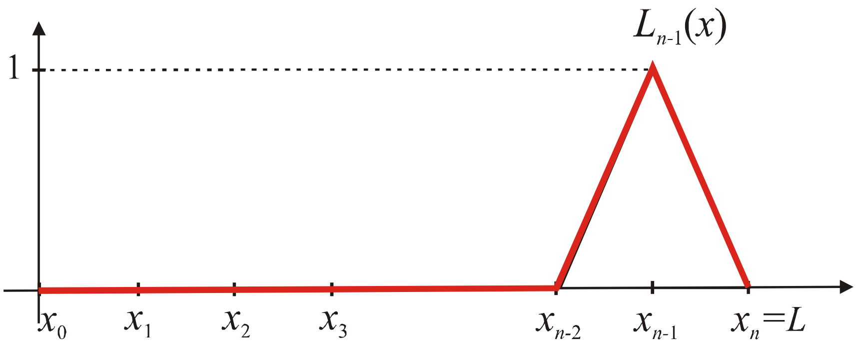
Con esto formamos las funciones de base L_i definidas por

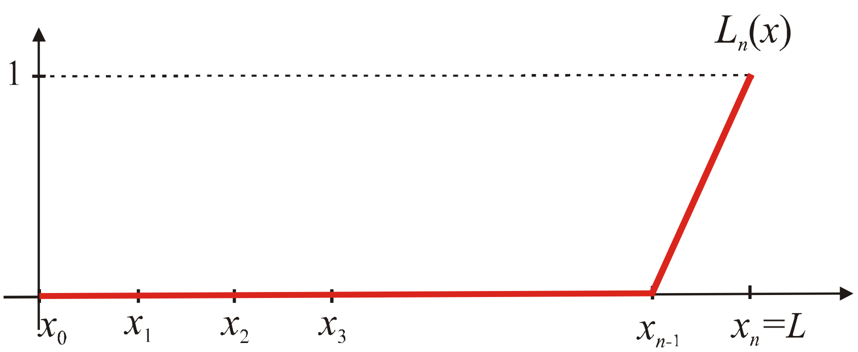
$$L_i(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le x_{i-1} \\ \dfrac{1}{h}(x - x_{i-1}), & x_{i-1} < x \le x_i \\ -\dfrac{1}{h}(x - x_{i+1}), & x_i < x \le x_{i+1} \\ 0, & x_{i+1} < x \le L \end{cases} \qquad para \quad i = 1,\ 2,\ \dots,\ n-1$$

$$L_i(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le x_{i-1} \\ \dfrac{1}{h}(x - x_{i-1}), & x_{i-1} < x < x_i \\ 1, & x = x_i \end{cases} \qquad para \quad i = n$$


$L_1(x)$
1
x_0
x_1
x_2
$x_n=L$


$L_2(x)$
1
x_0
x_1
x_2
x_3
$x_n=L$


$L_{n-1}(x)$
1
x_0
x_1
x_2
x_3
x_{n-2}
x_{n-1}
$x_n=L$

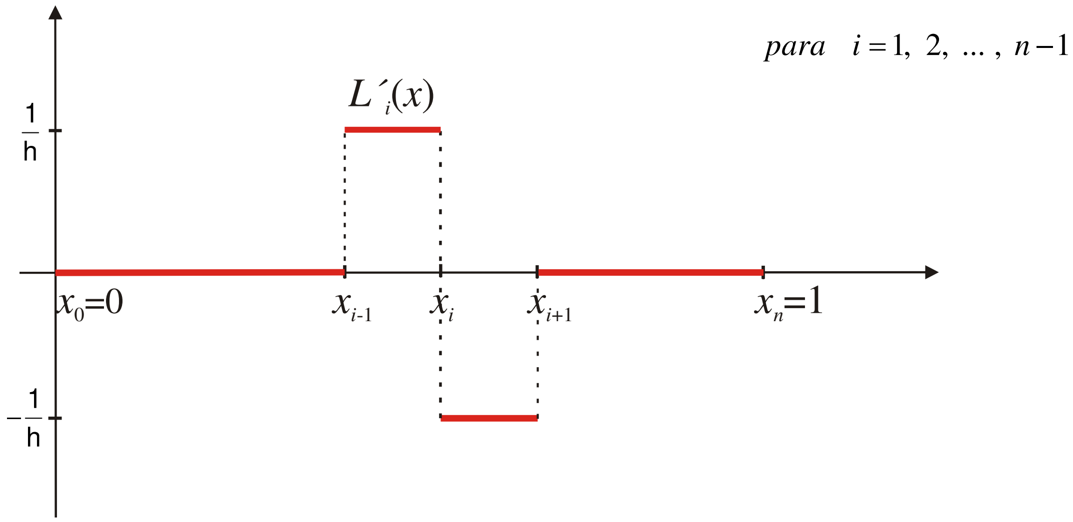

$L_n(x)$
1
x_0
x_1
x_2
x_3
x_{n-1}
$x_n=L$

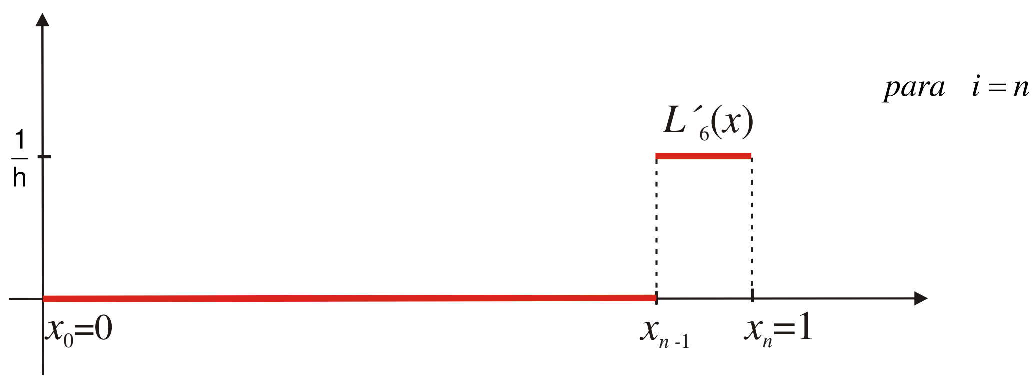
$para \quad i = n$

Como las funciones de base L_i son lineales a trozos, las derivadas $L_i^{'}$, aunque no son continuas, son constantes en cada intervalo abierto. Por tanto tenemos

$$L_i^{'}(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < x_{i-1} \\ \dfrac{1}{h}, & x_{i-1} < x < x_i \\ -\dfrac{1}{h}, & x_i < x < x_{i+1} \\ 0, & x_{i+1} < x < L \end{cases} \qquad para \;\; i = 1,\; 2,\; \dots ,\; n-1$$

$$L_i^{'}(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < x_{i-1} \\ \dfrac{1}{h}, & x_{i-1} < x < x_i \\ 0, & x = x_i \end{cases} \qquad para \quad i = n$$





Tomando los $V_h = L_i$ y la solución $u_h(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j L_j(x)$, reemplazando en el problema discreto (3), se tiene:

$$\int_0^L p(x)\sum_{j=1}^{n} c_j L_j^{'}(x)L_i^{'}(x)dx + \int_0^L q(x)\sum_{j=1}^{n} c_j L_j(x)L_i(x)dx = \int_0^L f(x)L_i(x)dx + [p(x)\sum_{j=1}^{n} c_j L_j^{'}(x)L_i(x)]_0^L$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \int_0^L [p(x)L_j^{'}(x)L_i^{'}(x) + q(x)L_j(x)L_i(x)]dx = \int_0^L f(x)L_i(x)dx + [p(x)\sum_{j=1}^{n} c_j L_j^{'}(x)L_i(x)]_0^L$$

y se tiene el sistema lineal de $n \times n$ donde $c_1,\ c_2,\ \ldots ,c_n$ son las incógnitas

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \int_0^L [p(x)L_j^{'}(x)L_1^{'}(x) + q(x)L_j(x)L_1(x)]dx = \int_0^L f(x)L_1(x)dx + [p(x)\sum_{j=1}^{n} c_j L_j^{'}(x)L_1(x)]_0^L$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \int_0^L [p(x)L_j^{'}(x)L_2^{'}(x) + q(x)L_j(x)L_2(x)]dx = \int_0^L f(x)L_2(x)dx + [p(x)\sum_{j=1}^{n} c_j L_j^{'}(x)L_2(x)]_0^L$$

…………………………

…………………………

…………………………

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \int_0^L [p(x)L_j^{'}(x)L_n^{'}(x) + q(x)L_j(x)L_n(x)]dx = \int_0^L f(x)L_n(x)dx + [p(x)\sum_{j=1}^{n} c_j L_j^{'}(x)L_n(x)]_0^L$$

del cual resulta un sistema tri diagonal dado por

$$\boxed{Ac = b}$$

Donde:

La matriz $A = (a_{ij})_{nxn}$ es simétrica (es llamada *MATRIZ DE ENSAMBLAJE)*, y sus elementos son:

$$a_{ij} = \int_0^L [p(x)L_j^{'}(x)L_i^{'}(x) + q(x)L_j(x)L_i(x)]dx = a_{ji}$$

El vector $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ viene dado por

$$b_i = \int_0^L f(x)L_i(x)dx + [p(x)\sum_{j=1}^{n} c_j L_j^{'}(x)L_i(x)]_0^L$$

Y el vector $c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ : \\ c_n \end{bmatrix}$ es el vector incógnita.

Con estos coeficientes $c_1,\ c_2,\ \ldots ,c_n$, se tiene la solución del problema discreto $u_h(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i L_i(x)$ el cual es una solución aproximada del problema de Sturm Liouville, la cual cumple las condiciones de Frontera del Problema (1) i.e.

$u_h(0) = 0\ ,\quad u_h(L) = 1$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad 1 = u_h(L) &= \sum_{i=1}^{n} c_i L_i(L) = c_1 L_1(L) + c_2 L_2(L) + \ \ldots\ldots \ + c_{n-1} L_{n-1}(L) + c_n L_n(L) \\
&= c_1.0 + c_2.0 \ + \ldots + \ c_{n-1}.0 + c_n L_n(L) \\
&= c_n L_n(L) = c_n(1) = c_n
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad c_n = 1$$

CAPITULO III

3.1 EJEMPLO DE APLICACIÓN

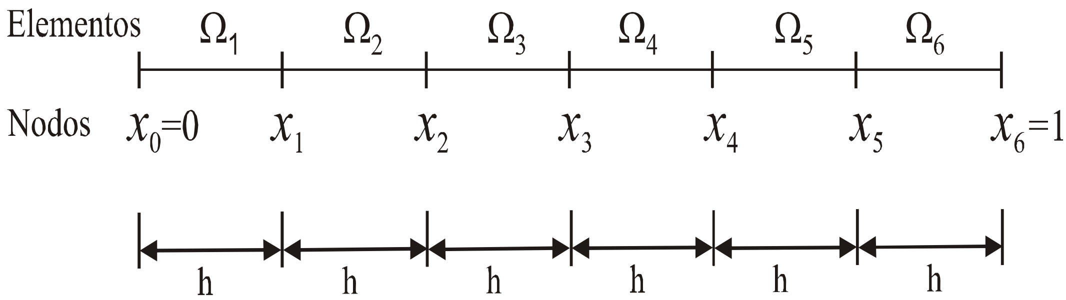
Resolver el problema de Valor de Frontera

$$\begin{cases} -u'' + u = x^2 - 2, & 0 \le x \le 1 \\ u(0) = 0 \quad , \quad u(1) = 1 & \end{cases} \qquad \text{..........} \ (4)$$

<u>Solución</u>

Tenemos $p(x) = 1, \quad q(x) = 1, \quad f(x) = x^2 - 2.$

Dividimos el intervalo [0,1], en 6 sub intervalos iguales cuyos extremos son los nodos $x_i = ih$ para $i = 0,\ 1,\ ....\ ,6$ donde $h = \frac{1}{6}.$ El número de funciones de base es $n = 6$.



Con esto formamos las funciones de base L_i y sus derivadas L_i' dador por:

$$L_i(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le x_{i-1} \\ \frac{1}{h}(x - x_{i-1}), & x_{i-1} < x \le x_i \\ -\frac{1}{h}(x - x_{i+1}), & x_i < x \le x_{i+1} \\ 0, & x_{i+1} < x \le L \end{cases} \qquad para \quad i = 1,\ 2,\ 3, 4, 5$$

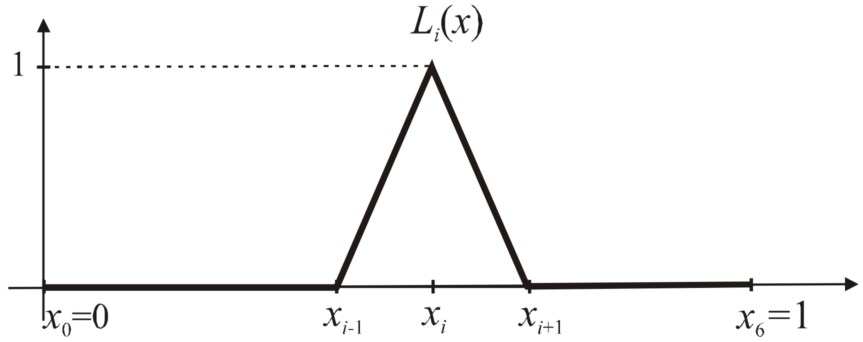
$$L_i(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le x_{i-1} \\ \frac{1}{h}(x - x_{i-1}), & x_{i-1} < x < x_i \\ 1, & x = x_i \end{cases} \qquad para \quad i = 6$$

$$L_1(x)=\begin{cases} 0, & 0\le x\le 0\\ \dfrac{1}{h}x, & 0<x\le h\\ -\dfrac{1}{h}(x-2h), & h<x\le 2h\\ 0, & 2h<x\le 1\end{cases}\qquad L_2(x)=\begin{cases} 0, & 0\le x\le h\\ \dfrac{1}{h}(x-h), & h<x\le 2h\\ -\dfrac{1}{h}(x-3h), & 2h<x\le 3h\\ 0, & 3h<x\le 1\end{cases}$$

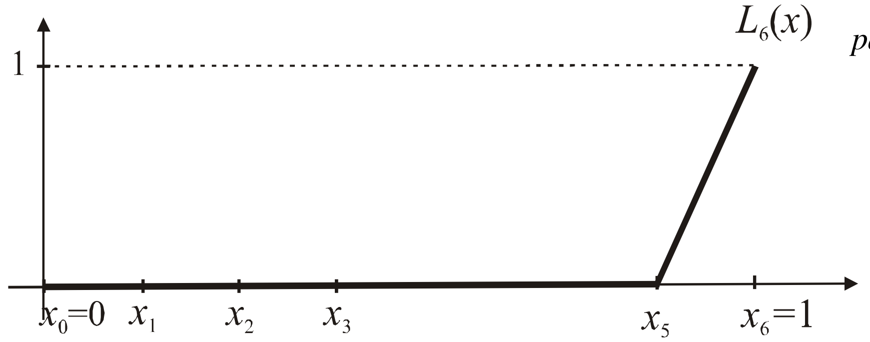
$$L_3(x)=\begin{cases} 0, & 0\le x\le 2h\\ \dfrac{1}{h}(x-2h), & 2h<x\le 3h\\ -\dfrac{1}{h}(x-3h), & 3h<x\le 4h\\ 0, & 4h<x\le 1\end{cases}\qquad L_4(x)=\begin{cases} 0, & 0\le x\le 3h\\ \dfrac{1}{h}(x-3h), & 3h<x\le 4h\\ -\dfrac{1}{h}(x-5h), & 4h<x\le 5h\\ 0, & 5h<x\le 1\end{cases}$$

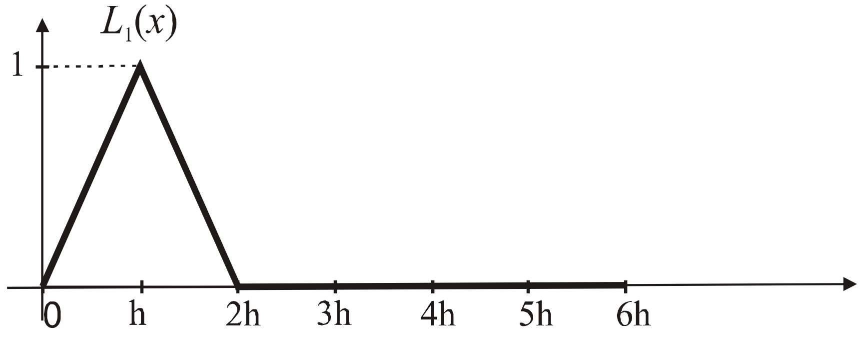
$$L_5(x)=\begin{cases} 0, & 0\le x\le 4h\\ \dfrac{1}{h}(x-4h), & 4h<x\le 5h\\ -\dfrac{1}{h}(x-6h), & 5h<x\le 6h\\ 0, & 6h<x\le 1\end{cases}\qquad L_6(x)=\begin{cases} 0, & 0\le x<5h\\ \dfrac{1}{h}(x-5h), & 5h<x<6h\\ 1, & x=6h=1\end{cases}$$

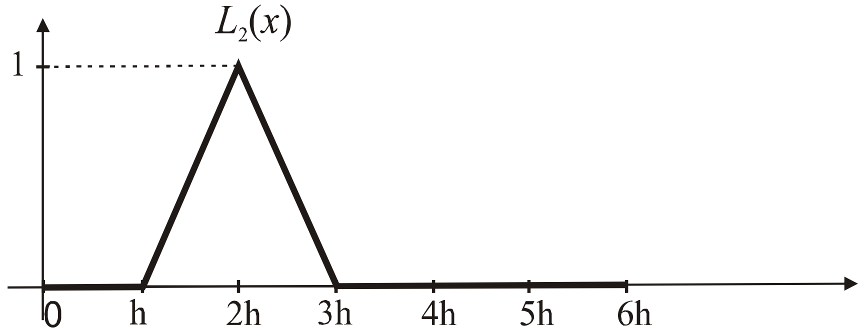
$para \quad i=1,\ 2,\ 3,4,5$

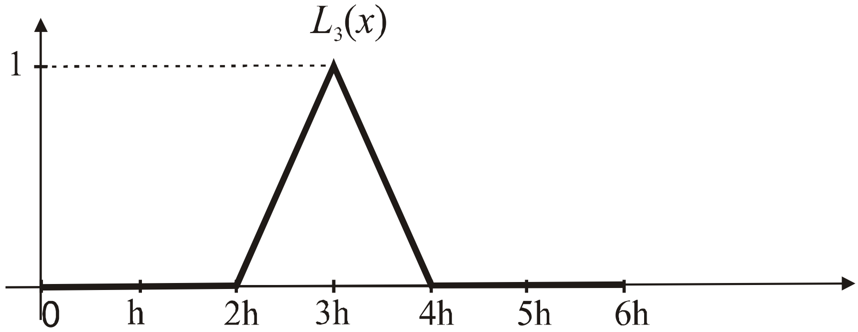


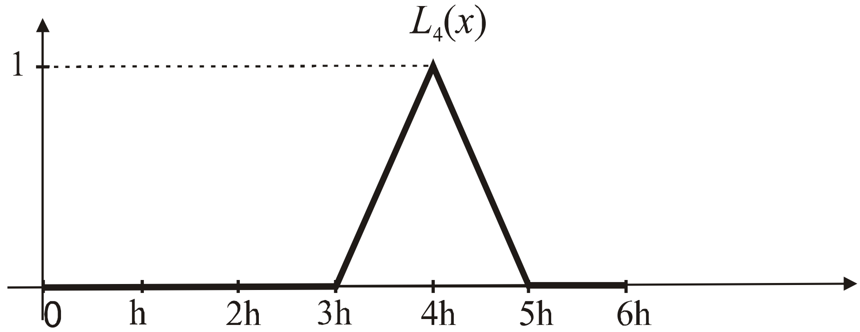
$para \quad i=6$

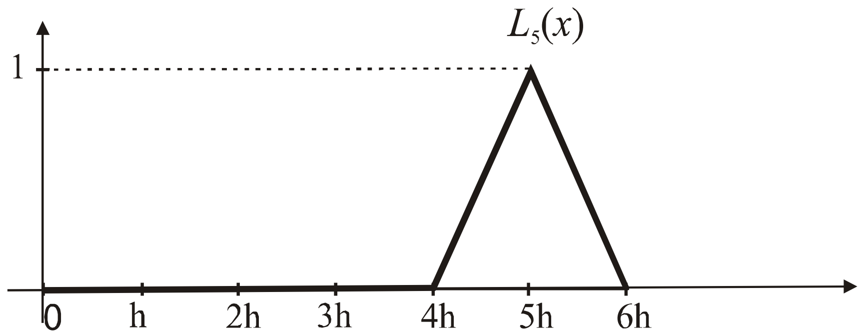


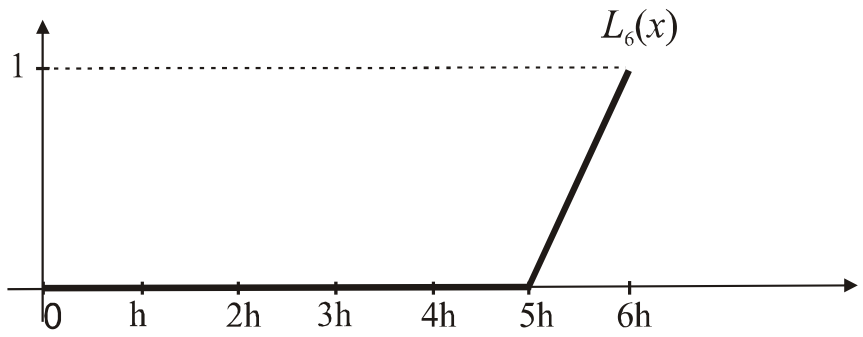

$L_1(x)$
1
0
h
2h
3h
4h
5h
6h

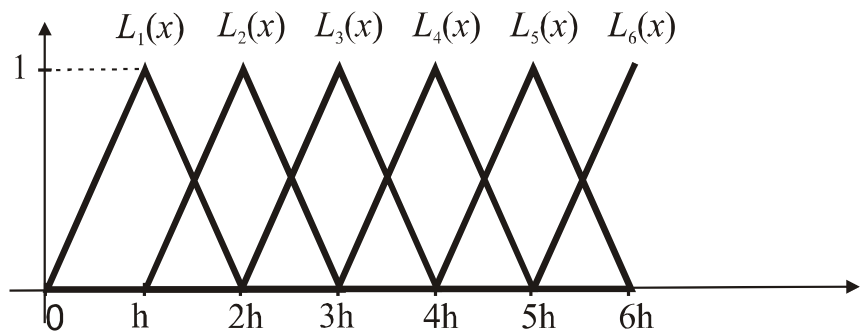

$L_2(x)$
1
0
h
2h
3h
4h
5h
6h


$L_3(x)$
1
0
h
2h
3h
4h
5h
6h


$L_4(x)$
1
0
h
2h
3h
4h
5h
6h


$L_5(x)$
1
0
h
2h
3h
4h
5h
6h





OBSERVACIÓN

$$L_2(x) = L_1(x-h)$$
$$L_3(x) = L_2(x-h) = L_1(x-2h)$$
$$L_4(x) = L_3(x-h) = L_2(x-2h) = L_1(x-3h)$$
$$L_5(x) = L_4(x-h) = L_3(x-2h) = L_2(x-3h) = L_1(x-4h)$$
$$L_6(x) = L_5(x-h) = L_4(x-2h) = L_3(x-3h) = L_2(x-4h) = L_1(x-5h)$$

Las derivadas de las funciones de base L_i son $L_i^{'}$

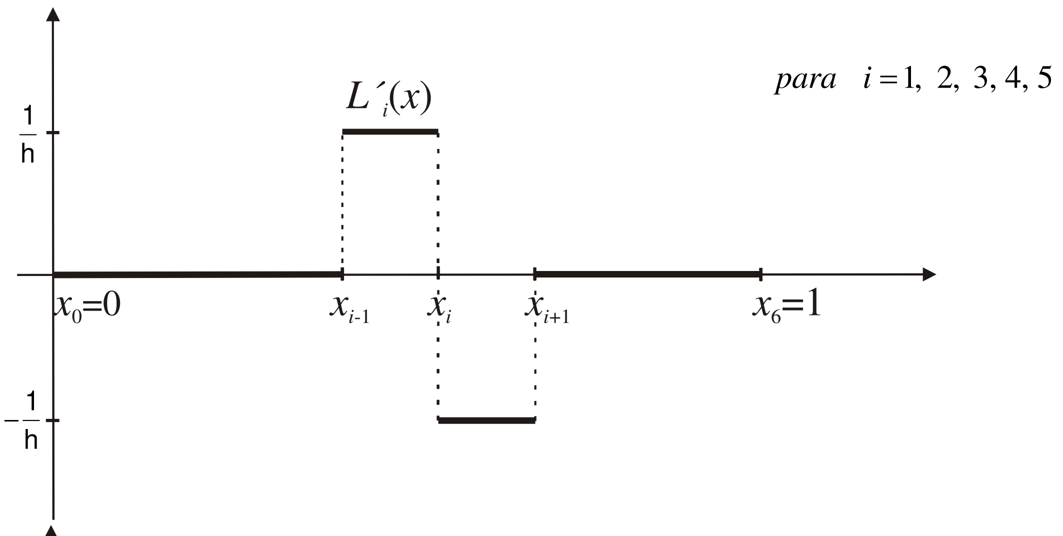
$$L_i^{'}(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < x_{i-1} \\ \dfrac{1}{h}, & x_{i-1} < x < x_i \\ -\dfrac{1}{h}, & x_i < x < x_{i+1} \\ 0, & x_{i+1} < x < 1 \end{cases} \qquad para \quad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$$

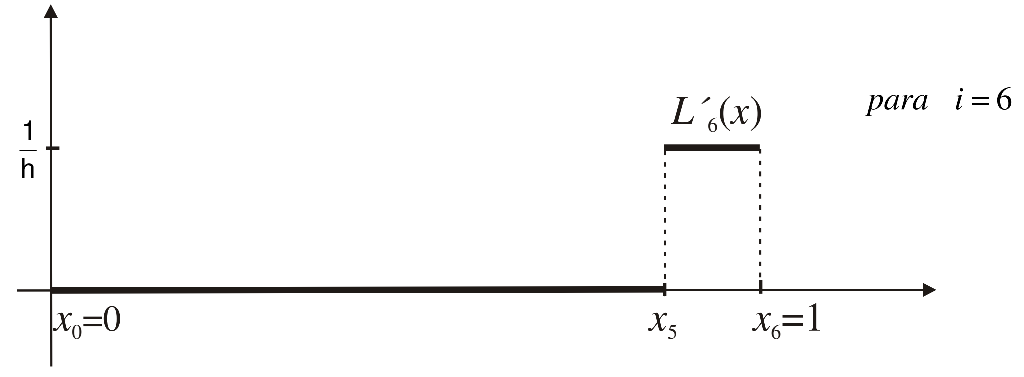
$$L_i^{'}(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < x_{i-1} \\ \dfrac{1}{h}, & x_{i-1} < x < x_i \\ 0, & x = x_i \end{cases} \qquad para \quad i = 6$$

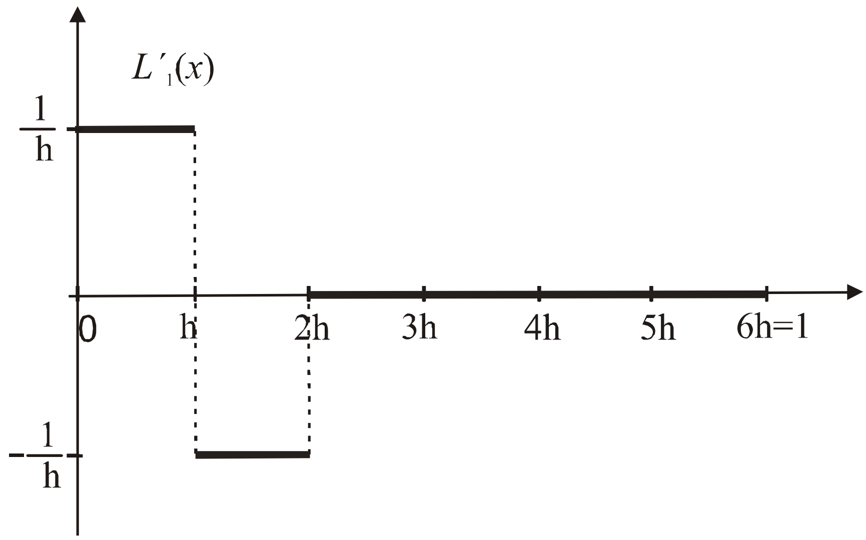
$$L_1'(x)=\begin{cases}0, & 0<x<0\\ \dfrac{1}{h}, & 0<x<h\\ -\dfrac{1}{h}, & h<x<2h\\ 0, & 2h<x<1\end{cases}\qquad L_2'(x)=\begin{cases}0, & 0<x<h\\ \dfrac{1}{h}, & h<x<2h\\ -\dfrac{1}{h}, & 2h<x<3h\\ 0, & 3h<x<1\end{cases}$$

$$L_3'(x)=\begin{cases}0, & 0<x<2h\\ \dfrac{1}{h}, & 2h<x<3h\\ -\dfrac{1}{h}, & 3h<x<4h\\ 0, & 4h<x<1\end{cases}\qquad L_4'(x)=\begin{cases}0, & 0<x<3h\\ \dfrac{1}{h}, & 3h<x<4h\\ -\dfrac{1}{h}, & 4h<x<5h\\ 0, & 5h<x<1\end{cases}$$

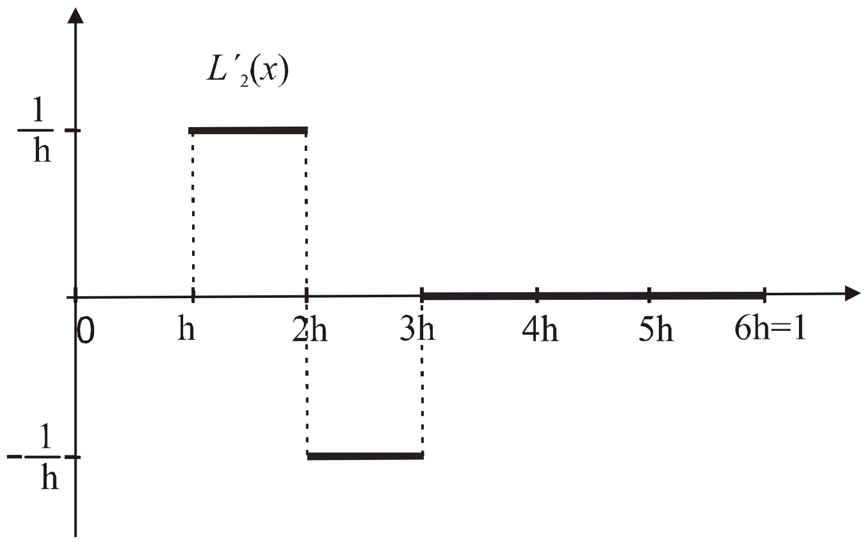
$$L_5'(x)=\begin{cases}0, & 0<x<4h\\ \dfrac{1}{h}, & 4h<x<5h\\ -\dfrac{1}{h}, & 5h<x<6h\\ 0, & 6h<x<1\end{cases}\qquad L_6'(x)=\begin{cases}0, & 0<x<5h\\ \dfrac{1}{h}, & 5h<x<6h\\ 0, & x=1\end{cases}$$



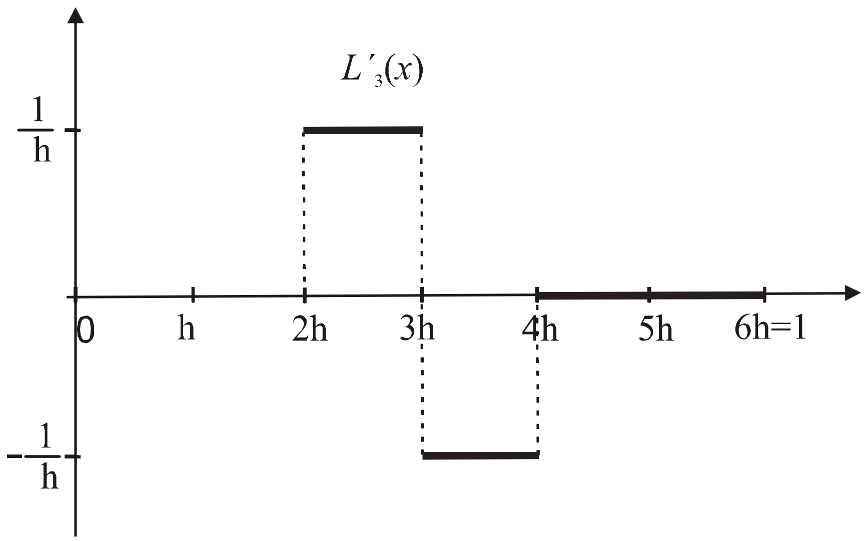




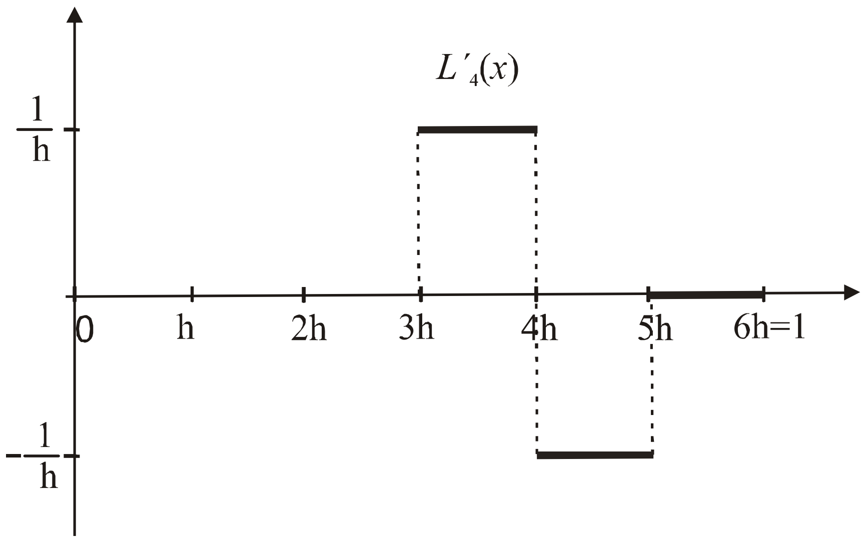
$L'_1(x)$
$\frac{1}{h}$
$-\frac{1}{h}$
0
h
2h
3h
4h
5h
6h=1

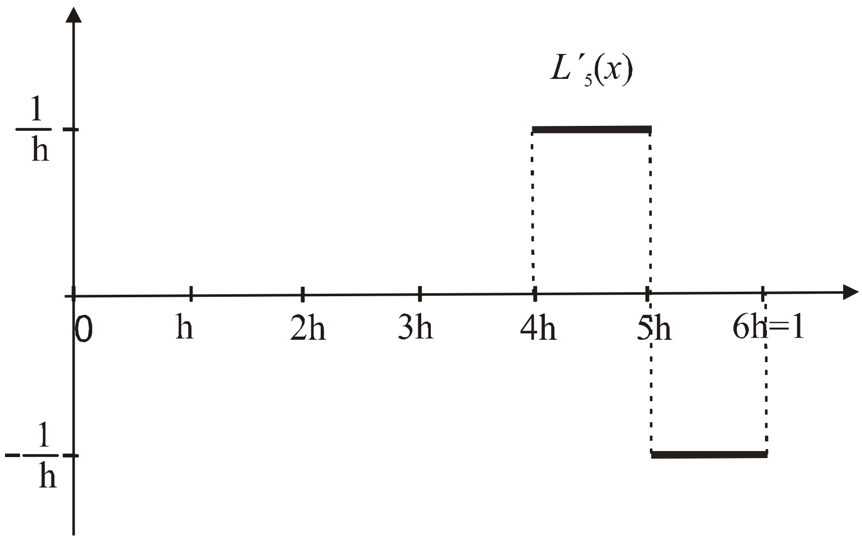


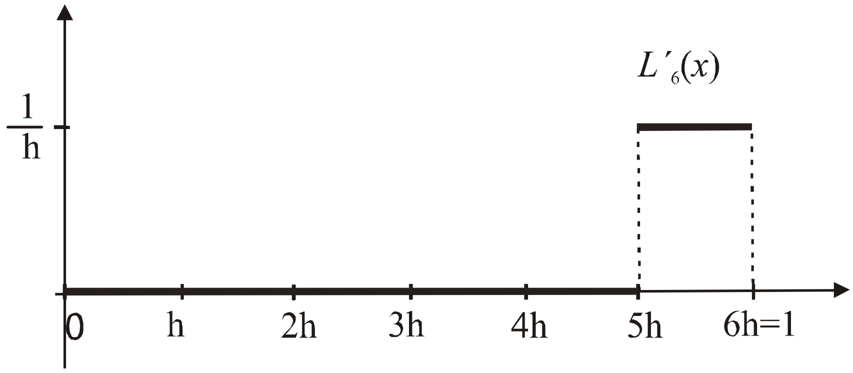
$L'_2(x)$
$\frac{1}{h}$
$-\frac{1}{h}$
0
h
2h
3h
4h
5h
6h=1



$L'_3(x)$
$\frac{1}{h}$
$-\frac{1}{h}$
0
h
2h
3h
4h
5h
6h=1


$L'_4(x)$
$\frac{1}{h}$
$-\frac{1}{h}$
0
h
2h
3h
4h
5h
6h=1


$L'_5(x)$
$\frac{1}{h}$
$-\frac{1}{h}$
0
h
2h
3h
4h
5h
6h=1


$L'_6(x)$
$\frac{1}{h}$
0
h
2h
3h
4h
5h
6h=1

Aplicando *GALERKIN* al Problema de Valor de Frontera

Se transforma en el problema discreto

$$\int_0^1 u_h^{'} v_h^{'} dx + \int_0^1 u_h v_h dx = \int_0^1 (x^2 - 2) v_h dx + \left[u_h^{'} v_h \right]_0^1 \qquad \forall\ v_h \in V_h = Gen\left\{ L_1, L_2, \ \dots \ , L_6 \right\} .$$

Debemos hallar

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^{6} c_i L_i(x) = c_1 L_1(x) + c_2 L_2(x) + c_3 L_3(x) + c_4 L_4(x) + c_5 L_5(x) + c_6 L_6(x)$$

Hacemos $v_h = L_i$ y tenemos el sistema lineal de 6×6 de incógnitas $c_1,\ c_2,\ \dots\ , c_6$

El cual expresado matricialmente es $Ac = b$, siendo $A = (a_{ij})_{6x6}$ la matriz de ensamblaje dado por $a_{ij} = \int_0^1 [L_j^{'}(x) L_i^{'}(x) + L_j(x) L_i(x)] dx = a_{ji}$

El vector $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_6 \end{bmatrix}$ viene dado por $b_i = \int_0^1 (x^2 - 2) L_i(x) dx + [\sum_{j=1}^{6} c_j L_j^{'}(x) L_i(x)]_0^1$

Calculo de $A = (a_{ij})_{6x6}$

<u>1^{ra} *fila*</u>

$$a_{11} = \int_0^1 [(L_1^{'}(x))^2 + (L_1(x))^2] dx = \int_0^h \frac{1}{h^2} dx \int_h^{2h} \left(\frac{1}{-h} \right)^2 dx + \int_0^h \frac{x^2}{h^2} dx + \int_h^{2h} \frac{(x-2h)^2}{h^2} dx$$
$$= \frac{2}{h} + \frac{2h}{3}$$

$$a_{12} = \int_0^1 [L_1^{'}(x) L_2^{'}(x) + L_1(x) L_2(x)] dx = \int_h^{2h} [L_1^{'}(x) L_2^{'}(x) + L_1(x) L_2(x)] dx$$
$$= \int_h^{2h} -\frac{1}{h^2} dx + \int_h^{2h} -\frac{(x-2h)(x-h)}{h^2} dx$$
$$= -\frac{1}{h} + \frac{h}{6}$$

$$a_{13} = a_{14} = a_{15} = a_{16} = 0$$

$\underline{2^{da}\ fila}$

$$a_{21} = a_{12} = -\frac{1}{h} + \frac{h}{6}$$

$$a_{22} = \int_0^1 [(L_2^{'}(x))^2 + (L_2(x))^2]dx = \int_h^{3h} [(L_1^{'}(x-h))^2 + (L_1(x-h))^2]dx$$
$$= \int_0^{2h} [(L_1^{'}(x))^2 + (L_1(x))^2] = \frac{2}{h} + \frac{2h}{3}$$

$$a_{23} = \int_0^1 [L_2^{'}(x)L_3^{'}(x) + L_2(x)L_3(x)]dx = \int_{2h}^{3h} [L_1^{'}(x-h)L_2^{'}(x-h) + L_1(x-h)L_2(x-h)]dx$$
$$= \int_h^{2h} [L_1^{'}(x)L_2^{'}(x) + L_1(x)L_2(x)] = -\frac{1}{h} + \frac{h}{6}$$

$\underline{3^{ra}\ fila}$

$$a_{31} = 0$$

$$a_{32} = a_{23} = -\frac{1}{h} + \frac{h}{6}$$

$$a_{33} = \int_{2h}^{4h} [(L_3^{'}(x))^2 + (L_3(x))^2]dx = \int_{2h}^{4h} [(L_1^{'}(x-2h))^2 + (L_1(x-2h))^2]dx$$
$$= \int_0^{2h} [(L_1^{'}(x))^2 + (L_1(x))^2] = \frac{2}{h} + \frac{2h}{3}$$
$$a_{34} = \int_{3h}^{4h} [L_3^{'}(x)L_4^{'}(x) + L_3(x)L_4(x)]dx = \int_{3h}^{4h} [L_1^{'}(x-2h)L_2^{'}(x-2h) + L_1(x-2h)L_2(x-2h)]dx$$
$$= \int_h^{2h} [L_1^{'}(x)L_2^{'}(x) + L_1(x)L_2(x)]dx \quad = -\frac{1}{h} + \frac{h}{6}$$
$$a_{35} = a_{36} = 0$$

$\underline{4^{ta}\ fila}$

$$a_{41} = a_{42} = a_{24} = 0$$

$$a_{43} = a_{34} = -\frac{1}{h} + \frac{h}{6}$$

$$a_{44} = \int_{3h}^{5h} [(L_4^{'}(x))^2 + (L_4(x))^2]dx = \int_{3h}^{5h} [(L_1^{'}(x-3h))^2 + (L_1(x-3h))^2]dx$$
$$= \int_0^{2h} [(L_1^{'}(x))^2 + (L_1(x))^2] = \frac{2}{h} + \frac{2h}{3}$$

$$a_{45} = \int_{4h}^{5h} [L_4^{'}(x) L_5^{'}(x) + L_4(x) L_5(x)] dx = \int_{4h}^{5h} [L_1^{'}(x-3h) L_2^{'}(x-3h) + L_1(x-3h) L_2(x-3h)] dx$$

$$= \int_{h}^{2h} [L_1^{'}(x) L_2^{'}(x) + L_1(x) L_2(x)] = -\frac{1}{h} + \frac{h}{6}$$

$$a_{46} = 0$$

<u>5^{ta} *fila*</u>

$$a_{51} = a_{52} = a_{53} = 0$$

$$a_{54} = a_{45} = -\frac{1}{h} + \frac{h}{6}$$

$$a_{55} = \int_{4h}^{6h} [(L_5^{'}(x))^2 + (L_5(x))^2] dx = \int_{4h}^{6h} [(L_1^{'}(x-4h))^2 + (L_1(x-4h))^2] dx$$

$$= \int_{0}^{2h} [(L_1^{'}(x))^2 + (L_1(x))^2] = \frac{2}{h} + \frac{2h}{3}$$

$$a_{56} = \int_{5h}^{6h} [L_5^{'}(x) L_6^{'}(x) + L_5(x) L_6(x)] dx = \int_{5h}^{6h} [L_1^{'}(x-4h) L_2^{'}(x-4h) + L_1(x-4h) L_2(x-4h)] dx$$

$$= \int_{h}^{2h} [L_1^{'}(x) L_2^{'}(x) + L_1(x) L_2(x)] = -\frac{1}{h} + \frac{h}{6}$$

<u>6^{ta} *fila*</u>

$$a_{61} = a_{62} = a_{63} = a_{64} = 0$$

$$a_{65} = a_{56} = -\frac{1}{h} + \frac{h}{6}$$

$$a_{66} = \int_{5h}^{6h} [(L_6^{'}(x))^2 + (L_6(x))^2] dx = \int_{5h}^{6h} [(L_1^{'}(x-5h))^2 + (L_1(x-5h))^2] dx$$

$$= \int_{0}^{h} [(L_1^{'}(x))^2 + (L_1(x))^2] = \int_{0}^{h} (\frac{1}{h^2} + \frac{x^2}{h^2}) dx$$

$$= \frac{1}{h} + \frac{h}{3}$$

Luego tenemos la matriz de ensamblaje

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{h}+\frac{2h}{3} & -\frac{1}{h}+\frac{h}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{h}+\frac{h}{6} & \frac{2}{h}+\frac{2h}{3} & -\frac{1}{h}+\frac{h}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h}+\frac{h}{6} & \frac{2}{h}+\frac{2h}{3} & -\frac{1}{h}+\frac{h}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{h}+\frac{h}{6} & \frac{2}{h}+\frac{2h}{3} & -\frac{1}{h}+\frac{h}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{h}+\frac{h}{6} & \frac{2}{h}+\frac{2h}{3} & -\frac{1}{h}+\frac{h}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{h}+\frac{h}{6} & \frac{1}{h}+\frac{h}{3} \end{bmatrix}$$

Calculo de $b = (b_{ij})_{6x1}$

$$\begin{aligned} b_1 &= \int_0^{2h} (x^2-2)L_1(x)dx + [\sum_{j=1}^{6} c_j L_j'(x) L_1(x)]_0^1 \\ &= \int_0^h (x^2-2)\frac{x}{h}dx + \int_h^{2h} -(x^2-2)\frac{(x-2h)}{h}dx + \sum_{j=1}^{6} c_j L_j'(1)\underbrace{L_1(1)}_{0} - \sum_{j=1}^{6} c_j L_j'(0)\underbrace{L_1(0)}_{0} \\ &= \int_0^h (x^2-2)\frac{x}{h}dx + \int_h^{2h} -(x^2-2)\frac{(x-2h)}{h}dx = \frac{7h^3}{6} - 2h + 0 - 0 \\ &= -0.3279 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_2 &= \int_h^{3h} (x^2-2)L_2(x)dx + [\sum_{j=1}^{6} c_j L_j'(x) L_2(x)]_0^1 \\ &= \int_h^{2h} (x^2-2)\frac{(x-h)}{h}dx + \int_{2h}^{3h} -(x^2-2)\frac{(x-3h)}{h}dx + \sum_{j=1}^{6} c_j L_j'(1)L_2(1) - \sum_{j=1}^{6} c_j L_j'(0)L_2(0) \\ &= \int_h^{2h} (x^2-2)\frac{(x-h)}{h}dx + \int_{2h}^{3h} -(x^2-2)\frac{(x-3h)}{h}dx + 0 - 0 \\ &= -0.3140 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_3 &= \int_{2h}^{4h} (x^2-2)L_3(x)dx + [\sum_{j=1}^{6} c_j L_j'(x) L_3(x)]_0^1 \\ &= \int_{2h}^{4h} (x^2-2)L_3(x)dx + \sum_{j=1}^{6} c_j L_j'(1)\underbrace{L_3(1)}_{0} - \sum_{j=1}^{6} c_j L_j'(0)\underbrace{L_3(0)}_{0} \\ &= \int_{2h}^{3h} (x^2-2)\frac{(x-2h)}{h}dx + \int_{3h}^{4h} -(x^2-2)\frac{(x-4h)}{h}dx + 0 - 0 \\ &= -0.2909 \end{aligned}$$

$$b_4=\int_{3h}^{5h}(x^2-2)L_4(x)dx+[\sum_{j=1}^{6}c_jL_j^{'}(x)L_4(x)]_0^1$$

$$=\int_{3h}^{5h}(x^2-2)L_4(x)dx+\sum_{j=1}^{6}c_jL_j^{'}(1)\underbrace{L_4(1)}_{0}-\sum_{j=1}^{6}c_jL_j^{'}(0)\underbrace{L_4(0)}_{0}$$

$$=\int_{3h}^{4h}(x^2-2)\frac{(x-3h)}{h}dx+\int_{4h}^{5h}-(x^2-2)\frac{(x-5h)}{h}dx+0-0$$

$$=-0.2585$$

$$b_5=\int_{4h}^{6h}(x^2-2)L_5(x)dx+[\sum_{j=1}^{6}c_jL_j^{'}(x)L_5(x)]_0^1$$

$$=\int_{4h}^{6h}(x^2-2)L_5(x)dx+\sum_{j=1}^{6}c_jL_j^{'}(1)\underbrace{L_5(1)}_{0}-\sum_{j=1}^{6}c_jL_j^{'}(0)\underbrace{L_5(0)}_{0}$$

$$=\int_{4h}^{5h}(x^2-2)\frac{(x-4h)}{h}dx+\int_{5h}^{6h}-(x^2-2)\frac{(x-6h)}{h}dx+0-0$$

$$=-0.2168$$

$$b_6=\int_{5h}^{6h}(x^2-2)L_6(x)dx+[\sum_{j=1}^{6}c_jL_j^{'}(x)L_6(x)]_0^1$$

$$=\int_{5h}^{6h}(x^2-2)L_6(x)dx+\sum_{j=1}^{6}c_j\underbrace{L_j^{'}(1)}_{0}\underbrace{L_6(1)}_{1}-\sum_{j=1}^{6}c_jL_j^{'}(0)\underbrace{L_6(0)}_{0}$$

$$=\int_{5h}^{6h}(x^2-2)\frac{(x-5h)}{h}dx$$

$$=\frac{193h^3}{12}-h$$

$$\Rightarrow b_6=-0.0922$$

Por lo tanto tenemos la ecuación matricial $\boxed{Ac=b}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}12.1111 & -5.9722 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -5.9722 & 12.1111 & -5.9722 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -5.9722 & 12.1111 & -5.9722 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -5.9722 & 12.1111 & -5.9722 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -5.9722 & 12.1111 & -5.9722\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5.9722 & 6.0555\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\\ c_3\\ c_4\\ c_5\\ c_6\end{bmatrix}}_{C}=\underbrace{\begin{bmatrix}-0.3279\\ -0.3140\\ -0.2909\\ -0.2585\\ -0.2168\\ -0.0922\end{bmatrix}}_{b}$$

Ahora vamos a solucionar esta ecuación matricial.

Como $c_6 = 1 \quad \Rightarrow$ solo nos falta hallar los $c_1, c_2, \ldots, c_5$ luego tenemos

$$12.1111c_1 - 5.9722c_2 = -0.3279 \qquad (1)$$

$$-5.9722c_1 + 12.1111c_2 - 5.9722c_3 = -0.3140 \qquad (2)$$

$$-5.9722c_2 + 12.1111c_3 - 5.9722c_4 = -0.2909 \qquad (3)$$

$$-5.9722c_3 + 12.1111c_4 - 5.9722c_5 = -0.2585 \qquad (4)$$

$$-5.9722c_4 + 12.1111c_5 - 5.9722c_6 = -0.2168 \qquad (5)$$

$$-5.9722c_5 + 12.1111c_6 = -0.0922 \qquad (6)$$

Como $c_6 = 1 \quad \Rightarrow$ la ecuación (5) se convierte en:

$$-5.9722c_4 + 12.1111c_5 = -0.2168 + 5.9722 \times (1) = 5.7554$$

Entonces la nueva ecuación matricial es

$$\begin{bmatrix} 12.1111 & -5.9722 & 0 & 0 & 0 \\ -5.9722 & 12.1111 & -5.9722 & 0 & 0 \\ 0 & -5.9722 & 12.1111 & -5.9722 & 0 \\ 0 & 0 & -5.9722 & 12.1111 & -5.9722 \\ 0 & 0 & 0 & -5.9722 & 12.1111 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.3279 \\ -0.3140 \\ -0.2909 \\ -0.2585 \\ 5.7554 \end{bmatrix}$$

De donde resolviendo resulta

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0275 \\ 0.1106 \\ 0.2496 \\ 0.4440 \\ 0.6942 \end{bmatrix} \quad \text{como} \quad c_6 = 1 \quad \Rightarrow \quad c = \begin{bmatrix} 0.0275 \\ 0.1106 \\ 0.2496 \\ 0.4440 \\ 0.6942 \\ 1.0000 \end{bmatrix}$$

Luego la solución aproximada es:

$$u_h(x) = 0.0275L_1(x) + 0.1106L_2(x) + 0.2495L_3(x) + 0.440L_4(x) + 0.6942L_5(x) + L_6(x)$$

$$u_h(x_1) = 0.0275L_1(x_1) = 0.0275 \times 1 = 0.0275 = c_1$$

$$u_h(x_2) = 0.1106L_2(x_2) = 0.1106 \times 1 = 0.1106 = c_2$$

$$\Rightarrow \quad c_i = u_h(x_i) \qquad i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 6$$

Resultado final

i	x_i	$u_h(x_i)$	u_{exacta}
0	0	0	0
1	0.1667	0.0275	0.0278
2	0.3333	0.1106	0.1111
3	0.5000	0.2495	0.2500
4	0.6667	0.4440	0.4444
5	0.8333	0.6942	0.6944
6	1	1	1

CAPITULO IV

4.1 PROGRAMA DEL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS LINEALES

4.1.1 *Función escalón unitario*

```
function y=e(c,s);
n=length(s);
for i=1:n
   if(s(i)<c)
     y(i)=0;
   else
     y(i)=1;
   end
end
```

4.1.2 *Funciones de base $L_j(s)xf(x)$*

j=1,2,...,n

```
function y=fb333(s);
global h a  i
 y1=(s-(i-1)*h)/h;
y2=-(s-(i+1)*h)/h;
y=(y1+(y2-y1).*e(a+i*h,s)).*f(s);
```

4.1.3 *Función para la gráfica de la solución Exacta y la Aproximada*

```
function y=fb444(s);
global h a  U J
y1=(s-(J-1)*h)/h;
y2=-(s-(J+1)*h)/h;
y=(y1+(y2-y1).*e(a+J*h,s))*U(J);

function yg=fb555(s);
global h a  i
y1=(s-(i-1)*h)/h;
y2=-(s-(i+1)*h)/h;
yg=y1+(y2-y1).*e(a+i*h,s);
```

4.1.4 *Funciones de base $L_j(s)$ para la matriz de ensamblaje*

j=1, 2,..., n

```
function y11=L1(s);
global I h
y11=(s-I*h)/h;

function y22=L2(s);
global I h
y22=-(s-(I+1)*h)/h;
```

4.1.5 *Funciones integrales para la matriz de ensamblaje*

```
function fm2=integ2(s);
global funq h
fm2=L1(s).*L2(s)*funq-((1/h)^2)*p(s);

function fm3=integ3(s);
global funp h
fm3=L1(s).*L2(s).*q(s)-((1/h)^2)*funp;
```

```
function fm4=integ4(s);
global h
fm4=L1(s).*L2(s).*q(s)-((1/h)^2)*p(s);


function fmc2=integc2(s);
global h l a funq
fmc2=(L1(s)+(L2(s)-L1(s)).*e(a+(l+1)*h,s).^2)*funq+((1/h)^2)*p(s);

function fmc3=integc3(s);
global h l a funp
fmc3=(L1(s)+(L2(s)-L1(s)).*e(a+(l+1)*h,s).^2).*q(s)+((1/h)^2)*funp;

function fmc4=integc4(s);
global h l a
fmc4=(L1(s)+(L2(s)-L1(s)).*e(a+(l+1)*h,s).^2).*q(s)+((1/h)^2)*p(s);
```

4.1.6 *Programa principal de elementos finitos*

```
function [A,L]=fbef22222;
clear
%L: vector de de terminos independientes
%de la forma L(i)=integral(f(t)*iesima-base(t),t(i)-h,t(i)+h)
%A: Matriz de ensamblaje
global h a b ya yb  i l  n f2 BOL  funq funp
fprintf('\t\t=====================================\n');
fprintf('\t\t     MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS    \n');
fprintf('\t\t=====================================\n');

fprintf('\t\t======================================\n');
fprintf('\t\t   -D(p(x)DU(x)) + q(x)U(x) = f(x)    \n');
fprintf('\t\t       U(0) = 0   ,   U(L) =  1          \n');
fprintf('\t\t======================================\n\n');

fprintf('\t\tINGRESO DE DATOS\n\n');
disp('SI  p(x)=cte    q(x)=cte         [1]');
disp('SI  p(x)=~cte   q(x)=cte         [2]');
disp('SI  p(x)=cte    q(x)~=cte        [3]');
disp('SI  p(x)~=cte   q(x)~=cte        [4]');

opcion=input('INGRESE LA OPCIÓN: ');
switch (opcion)
   case 1
       funp=input('Ingrese la función p(x)=');
       disfunp=fopen('p.m','w');
```

```
    fprintf(disfunp,'function yp=p(x);\n');
    fprintf(disfunp,'yp=%10.5f;\n',funp);
    fclose(disfunp);

    funq=input('Ingrese la función q(x)=');
    disfunq=fopen('q.m','w');
    fprintf(disfunq,'function yq=q(x);\n');
    fprintf(disfunq,'yq=%10.5f;\n',funq);
    fclose(disfunq);


  case 2
    funp=input('Ingrese la función p(x)=','s');
    funp=vectorize(funp);
    disfunp=fopen('p.m','w');
    fprintf(disfunp,'function yp=p(x);\n');
    fprintf(disfunp,'yp=%s;\n',funp);
    fclose(disfunp);

    funq=input('Ingrese la función q(x)=');
    disfunq=fopen('q.m','w');
    fprintf(disfunq,'function yq=q(x);\n');
    fprintf(disfunq,'yq=%10.5f;\n',funq);
    fclose(disfunq);


  case 3
    funp=input('Ingrese la función p(x)=');
    disfunp=fopen('p.m','w');
    fprintf(disfunp,'function yp=p(x);\n');
    fprintf(disfunp,'yp=%10.5f;\n',funp);
    fclose(disfunp);

    funq=input('Ingrese la función q(x)=','s');
    funq=vectorize(funq);
    disfunq=fopen('q.m','w');
    fprintf(disfunq,'function yq=q(x);\n');
    fprintf(disfunq,'yq=%s;\n',funq);
    fclose(disfunq);


  case 4
    funp=input('Ingrese la función p(x)=','s');
    funp=vectorize(funp);
    disfunp=fopen('p.m','w');
    fprintf(disfunp,'function yp=p(x);\n');
    fprintf(disfunp,'yp=%s;\n',funp);
    fclose(disfunp);
```

```
        funq=input('Ingrese la función q(x)=','s');
        funq=vectorize(funq);
        disfunq=fopen('q.m','w');
        fprintf(disfunq,'function yq=q(x);\n');
        fprintf(disfunq,'yq=%s;\n',funq);
        fclose(disfunq);
end
fun=input('Ingrese la función f(x)=','s');
fun=vectorize(fun);
disfun=fopen('f.m','w');
fprintf(disfun,'function y=f(x);\n');
fprintf(disfun,'y=%s;\n',fun);
fclose(disfun);


disp('Ingrese el intervalo [a,b]');
a=input('Extremo a: ');
b=input('Extremo b: ');
n=input('Ingrese el número de  funciones  de base n=');

fprintf('Ingrese las Condiciones de frontera y(%1.3f), y(%1.3f)\n',a,b);
fprintf('Condición de Frontera y(%1.3f):',a);
ya=input('');
fprintf('Condición de Frontera y(%1.3f):',b);
yb=input('');

fprintf('¿DESEA INGRESAR LA ECUACIÓN DIFERENCIAL?\n')
BOL=input('  SI:[1]\    NO:[2] : ');

if(BOL==1)
  fun1=input('Ingrese la Ecuación Diferencial: ','s');
  vf=input('Condiciones de Frontera: ','s');

  f1=dsolve(fun1,vf,'x')
  f2=input('Ingrese la Solución Exacta y=','s');
  disf=fopen('sf.m','w');
  fprintf(disf,'function ys=sf(x);\n');
  fprintf(disf,'ys=%s;\n',f2);
  fclose(disf);
end
h=(b-a)/n;
%VECTOR DE TERMINOS INDEPENDIENTES
figure(1);
clf
hold on
for i=1:n
    t(i)=a+i*h;
    if(i<n)
      s=t(i)-h:h:t(i)+h;
```

```
      L(i)=quadl('fb333',t(i)-h,t(i)+h);
      yg=fb555(s);
      plot(s,yg)
  else
      s=t(i)-h:h:t(i);
      L(i)=quadl('fb333',t(i)-h,t(i));
      yg=fb555(s);
      plot(s,yg)
  end

end
grid
title ('FUNCIONES DE BASE LINEALES ','fontsize',14)
L;
%HALLANDO LA MATRIZ DE ENSAMBLAJE
for I=1:n-1
    T(I)=a+I*h;
    s=T(I):0.1:T(I)+h;
      switch (opcion)
          case 1
              A(I,I+1)=funp*(-1/h)+funq*(h/6);
              A(I+1,I)=A(I,I+1);
          case 2
               A(I,I+1)=quadl('integ2',T(I),T(I)+h);
               A(I+1,I)=A(I,I+1);
          case 3
               A(I,I+1)=quadl('integ3',T(I),T(I)+h);
               A(I+1,I)=A(I,I+1);
          case 4
               A(I,I+1)=quadl('integ4',T(I),T(I)+h);
               A(I+1,I)=A(I,I+1);
       end
end
  for i=1:n
    t(i)=a+i*h;
    I=i-1;
    s=t(i):0.1:t(i)+h;
      switch (opcion)
          case 1
              A(i,i)=funp*(2/h)+funq*((2*h)/3);
          case 2
               A(i,i)=quadl('integc2',t(i)-h,t(i)+h);
          case 3
               A(i,i)=quadl('integc3',t(i)-h,t(i)+h);
          case 4
               A(i,i)=quadl('integc4',t(i)-h,t(i)+h);
       end
end
A(n,n)=A(n,n)/2;
```

```
A;
L(n-1)=L(n-1)-A(n-1,n);
L1=L(1:n-1);
L=L1';
AR1=A(:,1:n-1);
AR2=AR1(1:n-1,:);
A=AR2;
```

4.1.7 *Programa de Ejecución del Método de Elementos Finitos*

```
function [t,u]=sbef111;
global a b h ya yb n f2 U J BOL
[A,L]=fbef22222;
u=A\L;
for i=1:n-1
   t(i)=a+i*h;
end
   t=[a;t';b];
   if (BOL==1)
      for i=1:n+1
         Y(i)=sf(t(i));
      end
      u=[ya;u;yb];
      U=u(2:n+1);
      fprintf('\n\n\t\tSALIDAS DE SOLUCIONES\n\n')
      fprintf('MATRIZ DE ENSAMBLAJE Y EL TÉRMINO INDEPENDIENTE\n\n')
      AL=[A L]
      fprintf('  \ni     t(i)       u(i)        Y(i)\n\n')
      for i=1:n+1
         fprintf(' %2d    %4.4f     %4.4f     %2.4f\n',i-1,t(i),u(i),Y(i));
      end
      figure(2);
      clf
      plot(t,u,'r',t,Y,'b*','linewidth',2);
      hold on
      for J=1:n
         t(J)=a+J*h;
         if(J<n)
            s=t(J)-h:h:t(J)+h;
            y=fb444(s);
            plot(s,y)
         else
            s=t(J)-h:h:t(J);
            y=fb444(s);
            plot(s,y)
         end
```

```
    end
    grid
    xlabel('Eje x','fontsize',14)
    ylabel('Eje y','fontsize',14)
  title(['Gráfica de la Sol. Exacta Y=',f2,'(--)  y la Aproximada  (**)'],'fontsize',14)
   axis([a b min([min(u),min(Y)]) max([max(u),max(Y)])])
 else
    u=[ya;u;yb];
    U=u(2:n+1);
    fprintf('\n\n\t\tSALIDAS DE SOLUCIONES\n\n')
    fprintf('MATRIZ DE ENSAMBLAJE Y EL TÉRMINO INDEPENDIENTE\n\n')
    AL=[A L]
    fprintf('\n  i     t(i)       u(i)        \n\n')
    for i=1:n+1
       fprintf(' %2d   %4.4f     %4.4f     \n',i-1,t(i),u(i));
    end
    figure(2);
    clf
    plot(t,u,'r-*','linewidth',2);
    hold on
    for J=1:n
       t(J)=a+J*h;
       if(J<n)
          s=t(J)-h:h:t(J)+h;
          y=fb444(s);
          plot(s,y)
       else
          s=t(J)-h:h:t(J);
          y=fb444(s);
          plot(s,y)
       end
    end
    grid
    xlabel('Eje x','fontsize',14)
    ylabel('Eje y','fontsize',14)
    title('Gráfica de la Solución  Aproximada','fontsize',14)
    axis([a b min(u) max(u)])
 end
```

CAPITULO V

5.1 EJECUCIÓN DEL PROGRAMA DE ELEMENTOS FINITOS

5.1.1 Cuando p(x)=cte y q(x)=cte

$$\begin{cases} -u'' + u = x^2 - 2, & 0 \le x \le 1 \\ u(0) = 0 \quad , \quad u(1) = 1 \end{cases}$$

$$p(x) = 1, \quad q(x) = 1, \quad f(x) = x^2 - 2$$

```
 >> clear all
>> %INICIO DE PROGRAMA
>> sbef111;
                ====================================
                    MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS
                ====================================
                =====================================
                  -D(p(x)DU(x)) + q(x)U(x) = f(x)
                          U(0) = 0  ,   U(L) =  1
                =====================================

                INGRESO DE DATOS

SI  p(x)=cte    q(x)=cte          [1]
SI  p(x)=~cte   q(x)=cte          [2]
SI  p(x)=cte    q(x)~=cte         [3]
SI  p(x)~=cte   q(x)~=cte         [4]

INGRESE LA OPCIÓN: 1

Ingrese la función p(x)=1
Ingrese la función q(x)=1
Ingrese la función f(x)=x^2-2
Ingrese el intervalo [a,b]
Extremo a: 0
Extremo b: 1
Ingrese el número de  funciones  de base n=7
Ingrese las Condiciones de frontera y(0.000), y(1.000)
Condición de Frontera y(0.000):0
Condición de Frontera y(1.000):1

¿DESEA INGRESAR LA ECUACIÓN DIFERENCIAL?
  SI:[1]    NO:[2] : 1

Ingrese la Ecuación Diferencial: -D2U+U=x^2-2
Condiciones de Frontera: U(0)=0 , U(1)=1
```

f1 =
x^2
Ingrese la Solución Exacta y=x^2

SALIDAS DE SOLUCIONES

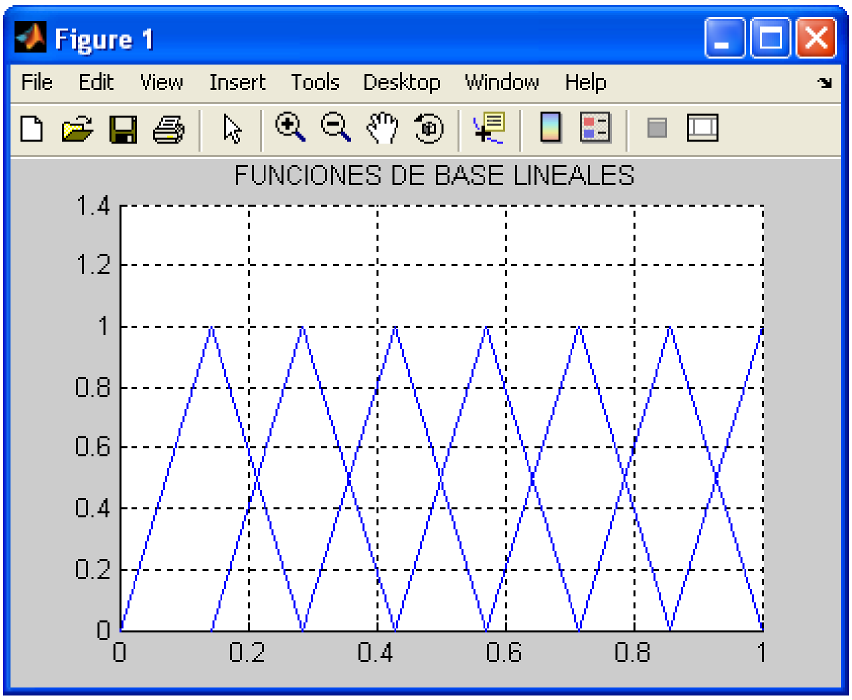
MATRIZ DE ENSAMBLAJE Y EL TERMINO INDEPENDIENTE

AL =

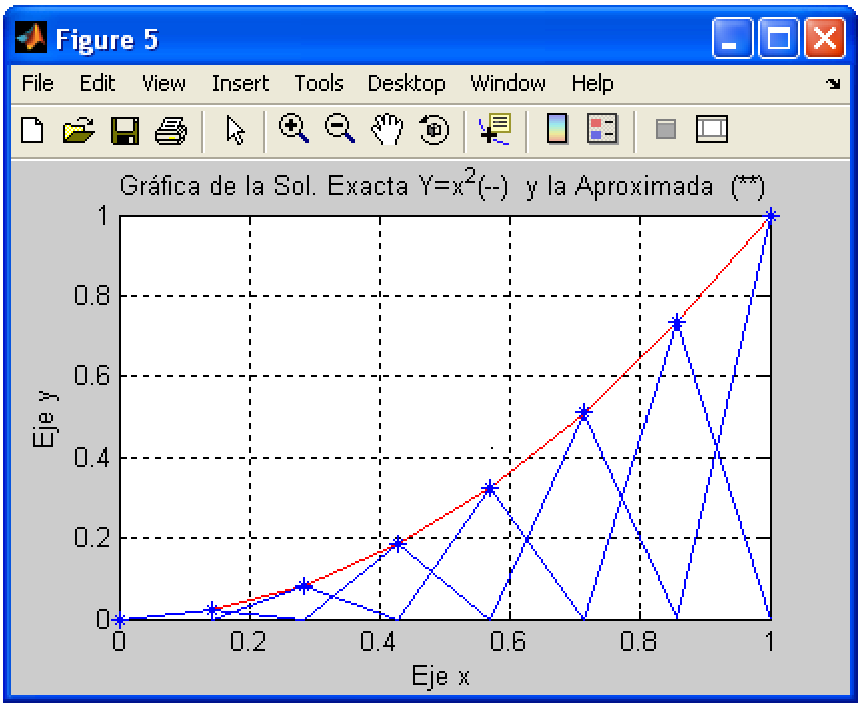
14.0952	-6.9762	0	0	0	0	-0.2823
-6.9762	14.0952	-6.9762	0	0	0	-0.2736
0	-6.9762	14.0952	-6.9762	0	0	-0.2590
0	0	-6.9762	14.0952	-6.9762	0	-0.2386
0	0	0	-6.9762	14.0952	-6.9762	-0.2123
0	0	0	0	-6.9762	14.0952	6.7959

i	t(i)	u(i)	Y(i)
0	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.1429	0.0202	0.0204
2	0.2857	0.0813	0.0816
3	0.4286	0.1833	0.1837
4	0.5714	0.3262	0.3265
5	0.7143	0.5099	0.5102
6	0.8571	0.7345	0.7347
7	1.0000	1.0000	1.0000

Gráfica de las funciones de Base



Gráfica de la Solución Exacta y la Solución Aproximada



5.1.2 Cuando p(x) ≠cte y q(x)=cte

$$\begin{cases} -\left((x^2+1)u'\right)' + 3u = -3x^2 - 8x - 2, & 0 \le x \le 1 \\ \quad u(0) = 0 \quad , \quad u(1) = 1 \end{cases}$$

$$p(x) = x^2 + 1, \quad q(x) = 3, \quad f(x) = -3x^2 - 8x - 2$$

```
>> clear all
>> sbef111;
                 ====================================
                    MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS
                 ====================================
                 =====================================
                   -D(p(x)DU(x)) + q(x)U(x) = f(x)
                          U(0) = 0  ,   U(L) =  1
                 =====================================

                 INGRESO DE DATOS

SI  p(x)=cte    q(x)=cte          [1]
SI  p(x)=~cte   q(x)=cte          [2]
SI  p(x)=cte    q(x)~=cte         [3]
SI  p(x)~=cte   q(x)~=cte         [4]
```

INGRESE LA OPCIÓN: 2

Ingrese la función p(x)=(x+1)^2
Ingrese la función q(x)=3
Ingrese la función f(x)=-3*(x^2)-8*x-2
Ingrese el intervalo [a,b]
Extremo a: 0
Extremo b: 1
Ingrese el número de funciones de base n=7
Ingrese las Condiciones de frontera y(0.000), y(1.000)
Condición de Frontera y(0.000):0
Condición de Frontera y(1.000):1

¿DESEA INGRESAR LA ECUACIÓN DIFERENCIAL?
SI:[1] NO:[2] : 2

SALIDAS DE SOLUCIONES

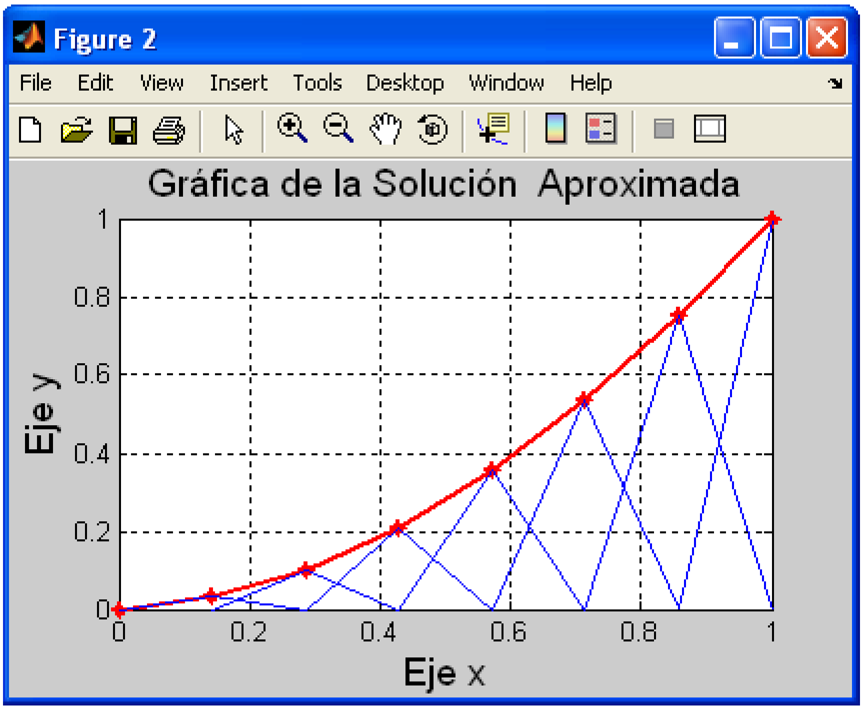
MATRIZ DE ENSAMBLAJE Y EL TERMINO INDEPENDIENTE

AL =

18.3810	-10.2619	0	0	0	0	-0.4592
-10.2619	23.2381	-12.8333	0	0	0	-0.6487
0	-12.8333	28.6667	-15.6905	0	0	-0.8557
0	0	-15.6905	34.6667	-18.8333	0	-1.0802
0	0	0	-18.8333	41.2381	-22.2619	-1.3222
0	0	0	0	-22.2619	48.3810	24.3946

i	t(i)	u(i)
0	0.0000	0.0000
1	0.1429	0.0320
2	0.2857	0.1021
3	0.4286	0.2098
4	0.5714	0.3543
5	0.7143	0.5348
6	0.8571	0.7503
7	1.0000	1.0000

Gráfica de la Solución Aproximada



5.1.3 Cuando p(x)=cte y q(x) ≠cte

$$\begin{cases} -\left(5u'\right)' + (x^2+1)u = x^4 + x^2 - 10, & 0 \le x \le 1 \\ u(0) = 0 \quad , \quad u(1) = 1 \end{cases}$$

$$p(x) = 5, \quad q(x) = (x^2+1), \quad f(x) = x^4 + x^2 - 10$$

```
>> clear all
>> sbef111;
              ====================================
                MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS
              ====================================
              =====================================
                 -D(p(x)DU(x)) + q(x)U(x) = f(x)
                       U(0) = 0  ,   U(L) =  1
              =====================================

              INGRESO DE DATOS

SI  p(x)=cte    q(x)=cte          [1]
SI  p(x)=~cte   q(x)=cte          [2]
SI  p(x)=cte    q(x)~=cte         [3]
SI  p(x)~=cte   q(x)~=cte         [4]
```

INGRESE LA OPCIÓN: 3

Ingrese la función p(x)=5
Ingrese la función q(x)=x^2+1
Ingrese la función f(x)=x^4+x^2-10
Ingrese el intervalo [a,b]
Extremo a: 0
Extremo b: 1
Ingrese el número de funciones de base n=7
Ingrese las Condiciones de frontera y(0.000), y(1.000)
Condición de Frontera y(0.000):0
Condición de Frontera y(1.000):1

¿DESEA INGRESAR LA ECUACIÓN DIFERENCIAL?
SI:[1] NO:[2] : 1

Ingrese la Ecuación Diferencial: -5*D2U+(x^2+1)*U=x^4+x^2-10
Condiciones de Frontera: U(0)=0 , U(1)=1

f1 =
x^2
Ingrese la Solución Exacta y=x^2

SALIDAS DE SOLUCIONES

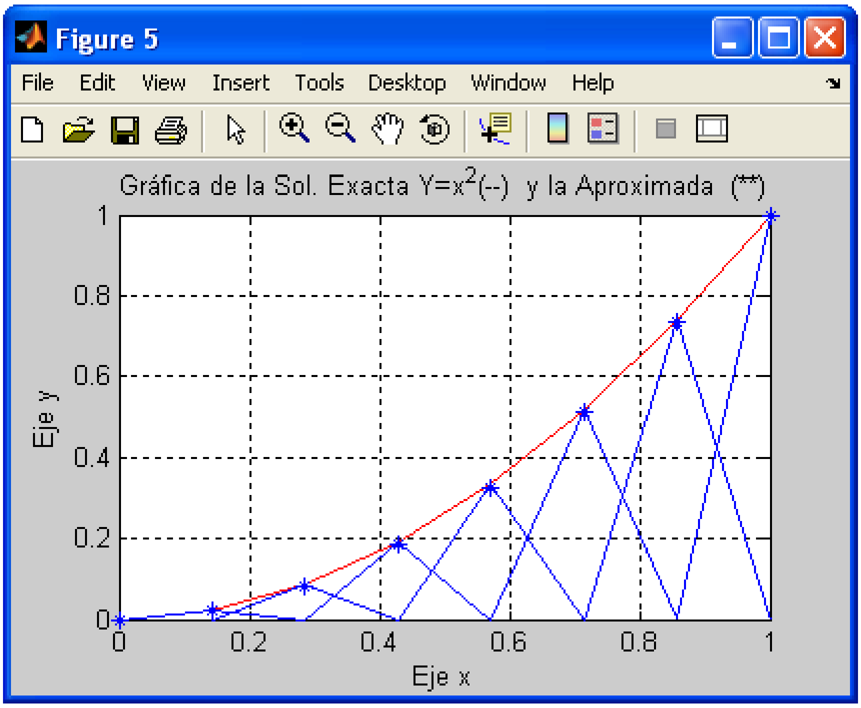
MATRIZ DE ENSAMBLAJE Y EL TERMINO INDEPENDIENTE

AL =

69.9966	-34.9751	0	0	0	0	-1.4250
-34.9751	69.9937	-34.9731	0	0	0	-1.4152
0	-34.9731	69.9908	-34.9702	0	0	-1.3965
0	0	-34.9702	69.9879	-34.9663	0	-1.3653
0	0	0	-34.9663	69.9849	-34.9615	-1.3165
0	0	0	0	-34.9615	69.9820	33.7118

i	t(i)	u(i)	Y(i)
0	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.1429	0.0227	0.0204
2	0.2857	0.0862	0.0816
3	0.4286	0.1902	0.1837
4	0.5714	0.3345	0.3265
5	0.7143	0.5183	0.5102
6	0.8571	0.7407	0.7347
7	1.0000	1.0000	1.0000

Gráfica de la Solución Exacta y la Solución Aproximada



5.1.4 Cuando p(x) ≠cte y q(x) ≠cte

$$\begin{cases} -\left((x^2+1)u'\right)' + (x^2+1)u = x^4 - 5x^2 - 2, & 0 \le x \le 1 \\ \quad u(0) = 0 \quad , \quad u(1) = 1 \end{cases}$$

$$p(x) = (x^2+1), \quad q(x) = (x^2+1), \quad f(x) = x^4 - 5x^2 - 2$$

```
>> clear all
>> sbef111;
                    ====================================
                      MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS
                    ====================================
                    =====================================
                      -D(p(x)DU(x)) + q(x)U(x) = f(x)
                              U(0) = 0  ,   U(L) =  1
                    =====================================

                    INGRESO DE DATOS

SI  p(x)=cte    q(x)=cte          [1]
SI  p(x)=~cte   q(x)=cte          [2]
SI  p(x)=cte    q(x)~=cte         [3]
SI  p(x)~=cte   q(x)~=cte         [4]
```

INGRESE LA OPCIÓN: 4

Ingrese la función p(x)=x^2+1
Ingrese la función q(x)=x^2+1
Ingrese la función f(x)=x^4-5*(x^2)-2
Ingrese el intervalo [a,b]
Extremo a: 0
Extremo b: 1
Ingrese el número de funciones de base n=7
Ingrese las Condiciones de frontera y(0.000), y(1.000)
Condición de Frontera y(0.000):0
Condición de Frontera y(1.000):1

¿DESEA INGRESAR LA ECUACIÓN DIFERENCIAL?
SI:[1] NO:[2] : 2

SALIDAS DE SOLUCIONES

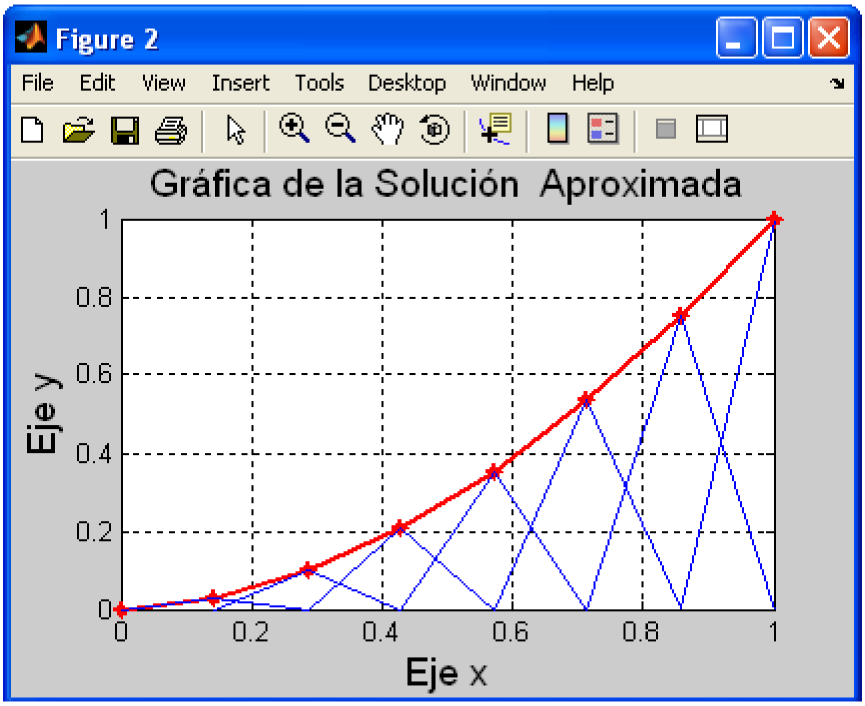
MATRIZ DE ENSAMBLAJE Y EL TERMINO INDEPENDIENTE

AL =

14.3776	-7.3084	0	0	0	0	-0.3026
-7.3084	15.2318	-7.8779	0	0	0	-0.3453
0	-7.8779	16.6574	-8.7321	0	0	-0.4140
0	0	-8.7321	18.6545	-9.8711	0	-0.5052
0	0	0	-9.8711	21.2230	-11.2948	-0.6139
0	0	0	0	-11.2948	24.3630	12.2696

i	t(i)	u(i)
0	0.0000	0.0000
1	0.1429	0.0286
2	0.2857	0.0977
3	0.4286	0.2062
4	0.5714	0.3526
5	0.7143	0.5351
6	0.8571	0.7517
7	1.0000	1.0000

Grafica de la Solución Exacta y la Aproximada



CONCLUSIÓN

He llegado a la conclusión después de arduo trabajo que esta teoría sirve para hallar la solución numérica de una ecuación diferencial ordinaria con condiciones de frontera como sigue

$$\begin{cases} \text{Hallar} \quad u = u(x) : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R} \, / \\ \quad -(p(x)u')' + q(x)u = f(x) \\ \quad u(0) = 0 \quad , \quad u(L) = 1 \end{cases}$$

Donde $p(x)$ y $q(x)$ deben ser positivos en el intervalo $[0, L]$ y para cualquier $f(x)$.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Evans-Blackledge –Yardley, "Numerical Methods for Partial Differential Equation ", Springer, 2001

[2] Cristian Amador Loli Prudencio. Revista de los Dep. de la Fac. de Ciencias Matemáticas "Matemática Computacional para EDO". UNMSM 2004

[3] Cristian Amador Loli Prudencio. Separata "Ecuaciones Diferenciales Ordinarias con Valor de Frontera". UNMSM 2004.

[4] Cristian Amador Loli Prudencio. Separata "Ecuaciones Diferenciales Ordinarias con Valor Inicial". UNMSM 2004.

[5] César Pérez López. Matlab y sus aplicaciones en las Ciencias y la Ingeniería Prentice Hall. 2002

[6] Burden-Faires, "Análisis Numérico" 2002

[7] Sofware de MATLAB versión 7.4.0.287 (R2007a)